10. cvičení - řešení

Příklad 1 (a)

$$f(x) = \sin x + \cos^2 x$$

Postupujme podle návodu.
1. definiční obor a spojitost
Funkce je definována na celém definičním oboru a je spojitá, neboť je součtem spojitých funkcí.

2. lichost, sudost, periodicita
Funkce f je 2π-periodická, neboť je součtem funkce $\sin x$ (perioda 2π) a $\cos^2 x$ (perioda π). Není ani sudá, ani lichá, neboť

$$f(-x) = \sin -x + \cos^2(-x) = -\sin x + \cos^2(x) \neq \pm f(x).$$

3. limity v „krajních bodech definičního intervalu"
Vzhledem k periodičnosti funkce nemá smysl vyšetřovat limity v $\pm\infty$. Jiné krajní body nemáme.

4. monotonie a extrémy pomocí první derivace
Spočteme první derivaci

$$f'(x) = \cos x - 2\cos x \sin x = \cos x(1 - 2\sin x),$$

Derivace je

- nulová v bodech $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ a $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$,
- kladná na $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k) \cup (\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$,
- a záporná na $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Funkce f je tedy rostoucí na $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k), (\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$ a klesající na $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k), (\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

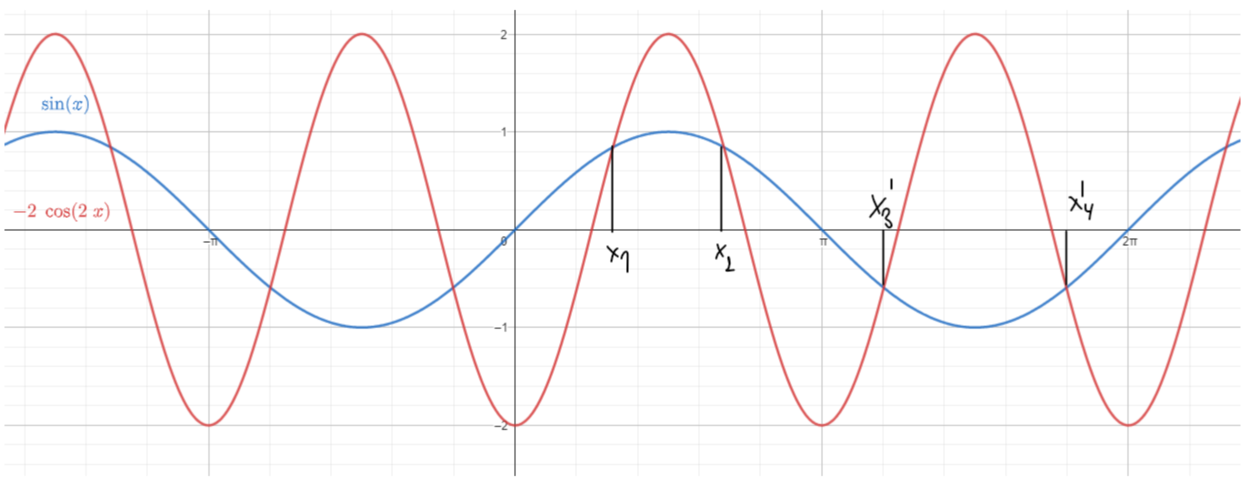
5. konvexní/konkávní pomocí druhé derivace
Spočteme druhou derivaci

$$f''(x) = -\sin x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x$$

Pro nalezení inflexních bodů hledáme x taková, že $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0$$
$$-\sin x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 0$$
$$4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \quad y := \sin x$$
$$4y^2 - y - 2 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 33, y = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$
$$\sin x = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \implies x_1 = \arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right), x_2 = \pi - x_1$$
$$\sin x = \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \implies x_1' = \arcsin\left(\frac{\sqrt{33} - 1}{8}\right), x_3' = \pi + x_1', x_4' = 2\pi - x_1'$$
$$x \in \left\{x_1 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi, x_3' + 2k\pi, x_4' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

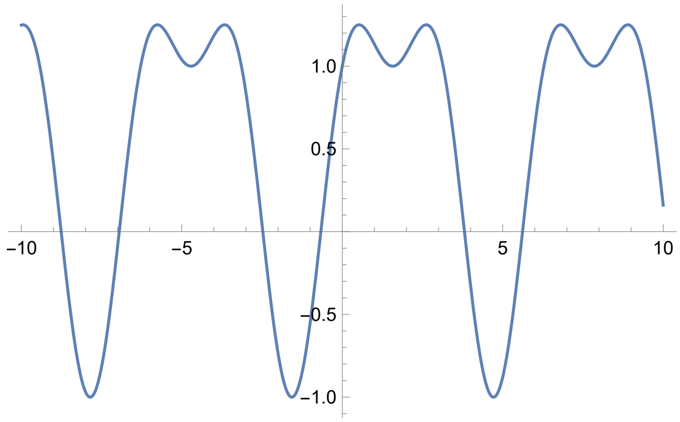
Přičemž $x_1 \approx 1, x_2 \approx 2,14, x_3' \approx 3,78, x_4' \approx 5,65$.



Z grafů funkcí je též vidno, že v bodě x_1 se f'' mění ze záporné na kladnou, v bodě x_2 naopak atd. Funkce je tedy počínaje dejme tomu nulou konkávní, pak konvexní, pak opět konkávní atd., neb zřejmě v inflexních bodech f'' vždy mění znaménko.

6. asymptoty
Funkce nemá žádné asymptoty.

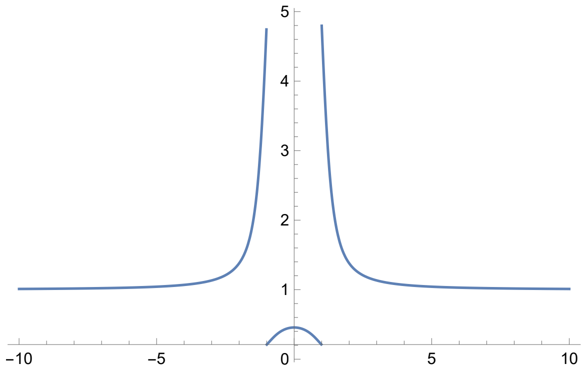
7. graf


1.0
0.5
-0.5
-1.0
-10
-5
5
10

Příklad 1 (b)

$$f(x) = e^{\arctan \frac{1}{x^2-1}}$$

Postup řešení je vysvětlen zde na straně 1 (odkaz).



Příklad 1 (c)

$$f(x) = e^{-x^2+3x-7}$$

Postupujme podle návodu.

1. definiční obor a spojitost

Funkce je definována na celé reálné ose, neboť se jedná o složení exponenciály a polynomu. Funkce je spojitá na celém definičním oboru, což opět plyne z toho, že se jedná o složení spojitých funkcí. Rovněž díky oboru hodnot exponenciály víme, že $f \geq 0$

2. lichost, sudost, periodicita

Funkce není ani sudá ani lichá, neboť

$$f(-x) = e^{-(-x)^2+3(-x)-7} = e^{-x^2-3x-7} \neq \pm f(x).$$

Zřejmě se nejdná ani o periodickou funkci.

3. limity v „krajních bodech definičního intervalu“

Zajímají nás limity v $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2+3x-7} \overset{\text{spoj. exp}}{=} 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2+3x-7} \overset{\text{spoj. exp}}{=} 0.$$

Tedy funkce v obou krajních bodech definičního oboru konverguje k nule.

4. monotonie a extrémy pomocí první derivace

$$f'(x) = e^{-x^2+3x-7} \cdot (-2x+3)$$

Derivace je nulová právě tehdy, když $-2x+3=0$. Tedy pro $x=\frac{3}{2}$. Na intervalu $(-\infty, \frac{3}{2})$ je derivace kladná a funkce f rostoucí. Na intervalu $(\frac{3}{2}, \infty)$ je derivace záporná a funkce f klesající.

Potom je $f(\frac{3}{2}) = e^{\frac{-19}{4}}$ globální maximum.

5. konvexní/konkávní pomocí druhé derivace

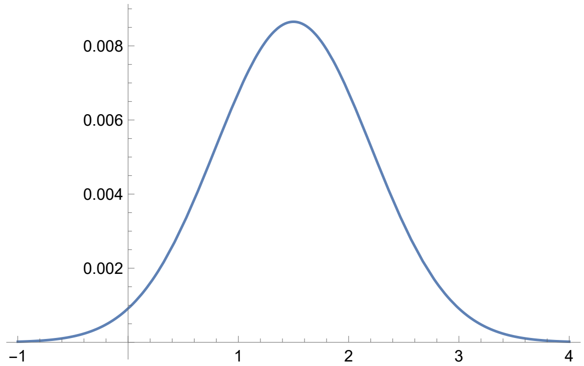
$$f''(x) = e^{-x^2+3x-7} \cdot (-2x+3)^2 + e^{-x^2+3x-7} \cdot (-2) = e^{-x^2+3x-7} \cdot (4x^2 - 12x + 7).$$

Druhá derivace je nulová právě tehdy, když $4x^2 - 12x + 7 = 0$. Tedy pro $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Na intervalech $(-\infty, \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ je druhá derivace kladná a funkce f konvexní. Na intervalu $(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$ je druhá derivace záporná a funkce f konkávní.

6. asymptoty

Má smysl uvažovat asymptoty v $\pm\infty$. Jelikož je f na intervalu $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ klesající a kladná, je asymptotou v nekonečnu zřejmě osa x. Pro $-\infty$ argumentujeme stejně.

7. graf


0.008
0.006
0.004
0.002
−1
1
2
3
4

Příklad 1 (d)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}}$$

Postupujme podle návodu.

1. definiční obor a spojitost

$f(x)$ je definováno $\iff x^3+1 \geq 0 \iff x^3 \geq -1 \iff x \geq -1$

$D(f) = [-1, \infty)$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spoijtých funkcí.

2. lichost, sudost, periodicita

Jelikož nemá funkce definiční obor symetrický kolem nuly, tak nemůže jít o funkci, která by byla sudá nebo lichá. Navíc zřejmě není ani periodická.

3. limity v „krajních bodech definičního intervalu“

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}} \overset{\text{VoAL + spoj.}}{=} \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to -1+}(x^3+1)}} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \overset{\text{VOLSF (P)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

4. monotonie a extrémy pomocí první derivace

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}}\right)' = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^3+1}\cdot(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

Kladnost f' je dána kladností výrazu $\sqrt{x^3+1}\cdot(2-x^3)$.

$f' > 0 \iff \sqrt{x^3+1}\cdot(2-x^3) > 0 \iff x \in \left(-1, \sqrt[3]{2}\right)$.

Tedy f je na $\left(-1, \sqrt[3]{2}\right)$ rostoucí a na $\left(\sqrt[3]{2}, \infty\right)$ klesající.

V bodě $x = \sqrt[3]{2}$ má nulovou první derivaci a jelikož nalevo od tohoto bodu roste a napravo klesá, nabývá f v bodě $\sqrt[3]{2}$ svého lokálního maxima. Lokální maximum je bod $\left[\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt{3}}\right]$.

5. konvexní/konkávní pomocí druhé derivace

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}\frac{2-x^3}{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}\right)' = \frac{3x^2\left(x^3-8\right)}{4\left(x^3+1\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f'' > 0 \iff \left(x^3-8\right) = (x-2)\left(x^2+2x+4\right) > 0 \iff x-2 > 0 \iff x \in (2, \infty)$$

Funkce f je tedy na intervalu $(-1, 2)$ konkávní a na intervalu $(2, \infty)$ konvexní.

6. asymptoty

Má smysl uvažovat jen asymptotu v ∞, neb na okolí $-\infty$ není f definována. Jelikož je f na intervalu $\left(\sqrt[3]{2}, \infty\right)$ klesající a v bodě $\sqrt[3]{2}$ nabývá hodnoty kladé hodnoty, je asymptotou v nekonečnu zřejmě osa x.

7. graf

$D(f) = [-1, \infty)$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spoijtých funkcí.

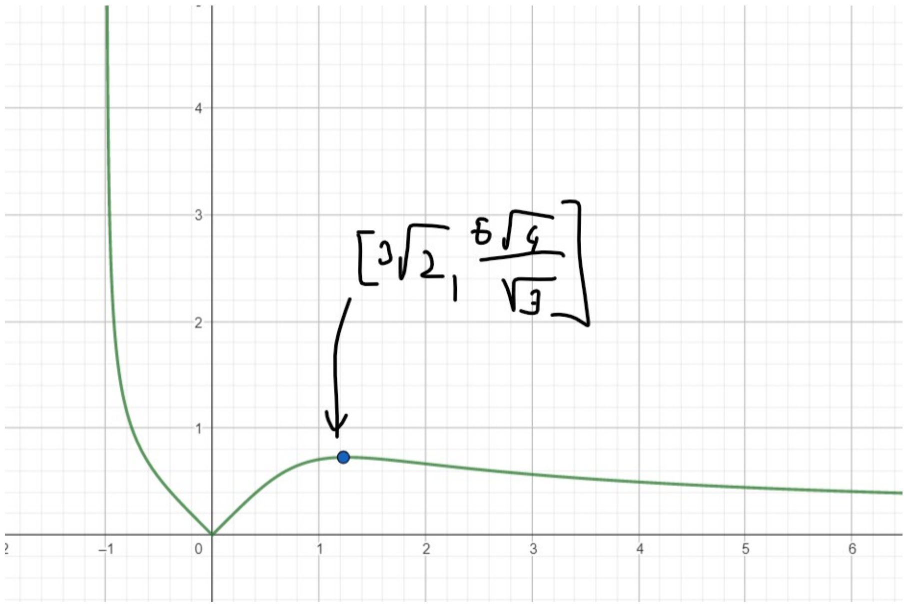
$\lim_{x \to -1+} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Tedy f je na $\left(-1, \sqrt[3]{2}\right)$ rostoucí a na $\left(\sqrt[3]{2}, \infty\right)$ klesající.

Lokální maximum je bod $\left[\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt{3}}\right]$.

Funkce f je tedy na intervalu $(-1, 2)$ konkávní a na intervalu $(2, \infty)$ konvexní.



Příklad 1 (e)

$$f(x) = \arccos\left(\cos^2 x\right)$$

Postupujme podle návodu.

1. definiční obor a spojitost

$D(f) = \mathbb{R}$

f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spojitých funkcí.

2. lichost, sudost, periodicita

Funkce cos je sudá, tedy i f je sudá.

Funkce $\cos^2$ je π-periodická, proto je i f π-periodická. Stačí tedy funkci f zkoumat na intervalu $[0, \pi]$ a zbytek grafu plyne z periodicity.

Věnujme se tedy funkci f jen na intervalu $[0, \pi]$

3. limity v „krajních bodech definičního intervalu“

$$\lim_{x\to 0+} \arccos\left(\cos^2 x\right) \overset{\text{spoj.}}{=} 0$$

$$\lim_{x\to \pi-} \arccos\left(\cos^2 x\right) \overset{\text{spoj.}}{=} 0$$

4. monotonie a extrémy pomocí první derivace

$$f'(x) = \left(\arccos\left(\cos^2 x\right)\right)' = \frac{2\cos x \sin x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}$$

$$f' > 0 \iff \cos x \sin x > 0 \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

f je na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí a na $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ klesající.

Lokálního maxima nabývá v bodě $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. konvexní/konkávní pomocí druhé derivace

$$f''(x) = \left(\frac{2\cos x \sin x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}\right)'$$

Derivujeme jako podíl dvou funkcí - tj. dle pravidla: $\left(\frac{h}{g}\right)' = \frac{h'\cdot g - h \cdot g'}{g^2}$. Zde je $h(x) = 2\cos x \sin x$ a $g(x) = \sqrt{1-\cos^4 x}$.

$$h'(x) = 2\left(-\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x\right) = 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \text{ (derivace součinu)}$$

$$g'(x) = \left(\left(1-\cos^4 x\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos^4 x\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(1-\cos^4 x\right)' = \text{ (derivace složené fce)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\cos^4 x}}\cdot\left(-4\cdot\cos^3 x\cdot(-\sin x)\right) = \frac{4\cos^3 x \sin x}{2\sqrt{1-\cos^4 x}} = \frac{2\cos^3 x \sin x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}$$

Pak tedy platí následující.

$$f''(x) = \frac{h' \cdot g - h \cdot g'}{g^2} = \frac{\left(2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\right) \cdot \sqrt{1-\cos^4 x} - 2\cos x \sin x \cdot \left(\frac{2\cos^3 x \sin x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}\right)}{\left(\sqrt{1-\cos^4 x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(2\cos^2 x - 2\sin^2 x\right)\left(1-\cos^4 x\right) - 4\cos^4 x \sin^2 x}{\left(1-\cos^4 x\right) \cdot \sqrt{1-\cos^4 x}}$$

Zřejmě $1-\cos^4 x \geq 0$, proto kladnost f' závisí na výrazu $\left(2\cos^2 x - 2\sin^2 x\right)\left(1-\cos^4 x\right) - 4\cos^4 x \sin^2 x$.

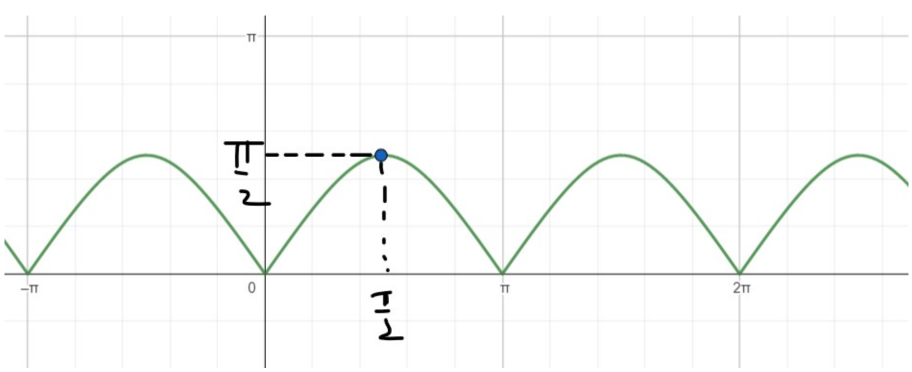
$$\left(2\cos^2 x - 2\sin^2 x\right)\left(1-\cos^4 x\right) - 4\cos^4 x \sin^2 x = 2\left(\cos^2 x - \cos^6 x - \sin^2 x - \cos^4 x \sin^2 x\right)$$

$$\begin{aligned} f'' > 0 &\iff \cos^2 x - \cos^6 x - \sin^2 x - \cos^4 x \sin^2 x > 0 \\ &\iff \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^4 x\left(-\sin^2 x - \cos^2 x\right) > 0 \iff -\left(\cos^2 x - 1\right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Poslední nerovnost neplatí nikde, tedy $f'' < 0$ na $(0, \pi)$.

6. asymptoty
Nemá smysl řešit asymptoty, vzhledem k tomu, že f je periodická.

7. graf
$D(f) = \mathbb{R}$
f je na celém $D(f)$ spojitá jakožto složení spoijtých funkcí.
f je π-periodická.
Na $(0, \pi)$ platí následující.
$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$
$\lim_{x \to \pi-} f(x) = 0$
f je na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí a na $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ klesající.
Lokálního maxima nabývá v bodě $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
f je na $(0, \pi)$ konkávní.
Aplikujeme-li i periodicitu, dostáváme následující graf.



Příklad 1 (f)

$$f(x) = \arccos \frac{2 \log x}{1 + \log^2 x}$$

Postup řešení je vysvětlen zde na straně 5 (odkaz).